Е.В. Борисов

Семантика для кросс-мировой предикации

Здесь представлен используемый в докладе формальный аппарат.

Используется ***формальный язык L***, имеющий следующие особенности:

1) L содержит только 2 вида термов – переменные и константы (я не включаю в L функциональные термы только ради простоты изложения).
Множество переменных Var языка L является счетным.

2) L содержит λ-оператор. Пусть x – переменная, a – терм, φ – формула;
тогда (λx.φ) – предикат, (λx.φ)(a) – формула. Чтобы облегчить формулы для визуального восприятия, я пишу (λx.φ)(a) как (a/x)φ.

3) В формулах L индивидные константы комбинируются с предикатами только посредством λ-операторов. Если a – константа, то «Pa» – *не* формула.
В формулах P комбинируется с a следующим образом: (a/x)Px [т.е. (λx.Px)(a)].

4) L содержит темпоральные операторы **P** (соответствует смыслу фразы «однажды в прошлом»), **H** («всегда в прошлом»), **F** («однажды в будущем») и **G** («всегда в будущем»).

Модель M для L представляет собой упорядоченную четверку < T, <, D, I >.

T –множество времен (моментов или периодов времени).

< – линейный порядок на T; интуитивно t<t′ означает что t предшествует t′.

D – функция, назначающая каждому времени t непустое множество объектов D(t) – домен t. Домен модели D(M) – это объединение доменов всех времен.

I – интерпретация индивидных констант и предикатов.

- Пусть a – индивидная константа. I(a) – это функция T → D(M).
- Пусть R – n-местный предикат. I(R) – это функция $T^n \rightarrow D(M)^n$.
  Т.е. I(R) задает экстенсионал R не для отдельных времен (как в стандартной темпоральной логике), а для *упорядоченных n-ок времен*.

Истинностная оценка формул в модели M осуществляется с учетом трех вещей: времени, валюации переменных и VT-функции.

- Валюация переменных – это функция Var → D(M).

- VT-функция – это *частичная* функция Var → T, т.е. функция, связывающая (некоторые) переменные с временами.

Нотация

$M, t, f \vDash_v \varphi$ означает: формула φ истинна в модели M во время t при валюации переменных v относительно VT-функции f. (В дальнейшем я опускаю «M».)

Пусть v – валюация переменных, пусть e ∈ D(M). Тогда v[e/x] – это x-вариант v, такой что v[e/x](x) = e.

Если a – терм, то vI(a) – это функция T → D(M), такая что:
vI(a)(t) = v(a), если a – переменная; vI(a)(t) = I(a)(t), если a – константа.

Пусть f – VT-функция, x – переменная, t – время. $f+\langle x, t\rangle =_{def} (f - (\{x\}\times T)) \cup \{\langle x, t\rangle\}$.
Интуитивный смысл f+<x, t> состоит в следующем:

- если f содержит пару $<x, \tau>$ для некоторого τ, то $f+<x, t>$ – это функция, которую мы получим, если заменим в f пару $<x, \tau>$ парой $<x, t>$;
- если f *не* содержит пару $<x, \tau>$ для какого-либо τ, то $f+<x, t>$ – это функция, которую мы получим, если добавим к f пару $<x, t>$.

Пусть f – VT-функция, а t – время. Тогда $f*t =_{def.} f \cup ((Var - Dom(f)) \times \{t\})$. Неформально: поскольку f – *частичная* функция, некоторые переменные могут не входить в домен f. Добавив к f все пары вида $<x, t>$, где $x \notin Dom(f)$, мы получим *полную* функцию $f*t$. Полная VT-функция нужна при эвалюации открытых формул.

$t \vDash_v \varphi$ означает $t, \emptyset \vDash_v \varphi$.

«тттк» - сокращение для «тогда и только тогда, когда».

Ради чего все затевалось: предлагаемое определение истины

(1) Если R – n-местный предикат, $x_1, \ldots, x_n$ – переменные, то

$t, f \vDash_v Rx_1 \ldots x_n$ тттк $<v(x_1), \ldots v(x_n)> \in I(R)(<f*t(x_1), \ldots f*t(x_n)>)$

(2) $t, f \vDash_v \sim\varphi$ тттк $t, f \nvDash_v \varphi$.

(3) $t, f \vDash_v \varphi\&\psi$ тттк $t, f \vDash_v \varphi$ и $t, f \vDash_v \psi$. Аналогично для других бинарных связок.

(4) $t, f \vDash_v (\exists x)\varphi$ тттк $(\exists e \in D(t))\ t, f+<x, t> \vDash_{v[e/x]} \varphi$. Аналогично для $\forall$.

(5) $t, f \vDash_v (a/x)\varphi$ тттк $t, f+<x, t> \vDash_{v[vI(a)(t)/x]} \varphi$.

(6) $t, f \vDash_v \mathbf{P}\varphi$ тттк $(\exists t'<t)\ t', f \vDash_v \varphi$. Аналогично для **H, F** и **G**.

Как эта штука летает

Формализуем предложение (*) как (**) и покажем, что данное определение истины обеспечивает интуитивно корректные истинностные условия (**).

(*) Джон был богаче, чем когда-либо впоследствии.

(**) $\mathbf{P}(j/x)\mathbf{G}(j/y)Rxy$

Распишем истинностные условия (**), допустив (для простоты), что в используемой модели «j» является жестким десигнатором для Джона. Справа в скобках указаны применяемые пункты определения истины.

$t \vDash_v \mathbf{P}(j/x)\mathbf{G}(j/y)Rxy$

тттк $(\exists t'<t)\ t', \emptyset \vDash_v (j/x)\mathbf{G}(j/y)Rxy$ (6)

тттк $(\exists t'<t)\ t', \{<x, t'>\} \vDash_{v[John/x]} \mathbf{G}(j/y)Rxy$ (5)

тттк $(\exists t'<t)(\forall t''>t')\ t'', \{<x, t'>\} \vDash_{v[John/x]} (j/y)Rxy$ (6)

тттк $(\exists t'<t)(\forall t''>t')\ t'', \{<x, t'>, <y, t''>\} \vDash_{v[John/x][John/y]} Rxy$ (5)

тттк $(\exists t'<t)(\forall t''>t')\ <w(x), w(y)> \in I(R)(<f*t(x), f*t(y)>)$

где $w = v[John/x][John/y]$, $f = \{<x, t'>, <y, t''>\}$ (1)

тттк $(\exists t'<t)(\forall t''>t')\ <John, John> \in I(R)(<t', t''>)$,

тттк существует время t′, предшествующее t, такое что для любого времени t′′, следующего за t′, Джон в t′ богаче, чем в t′′.